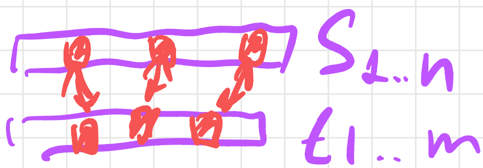
Динамическое программирование 2.

Алгоритм Хиршберга

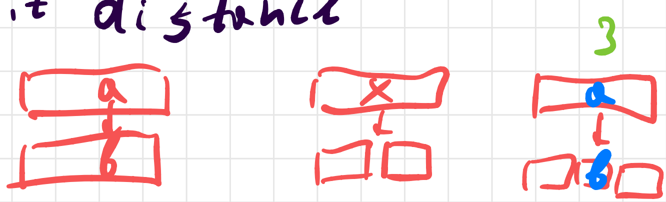
НОП



$$lcs_{a,b} := lcs(s_{1..a}, t_{1..b})$$

$$lcs_{a,b} = \max \{ lcs_{a-1,b};\ lcs_{a,b-1};\ 1 + lcs_{a-1,b-1} \text{ если } s_a = t_b \}$$

edit distance

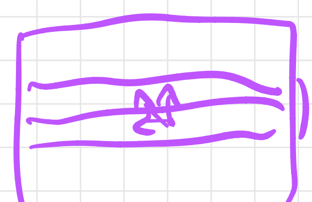


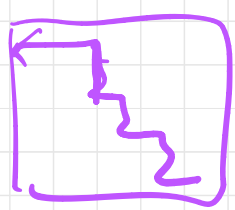
$$dst_{a,b} = dist(s_{1..a}, t_{1..b})$$

$$dst_{a,b} = \min \begin{cases} 1 + dst_{a-1,b} \\ 1 + dst_{a,b-1} \\ dst_{a-1,b-1} + \begin{cases} 1 & \text{если } s_a \neq t_b \\ 0 & \text{если } s_a = t_b \end{cases} \end{cases}$$

НОП (Хиршберг)

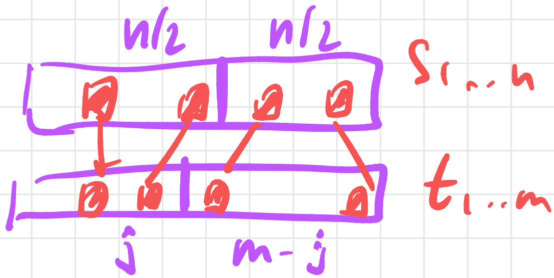
1) $O(nm)$ времени и памяти
2) $O(nm)$ времени, $O(n)$ памяти
без восстановления





3) $O(nm)$ времени; $O(n)$ памяти и восстановить ответ

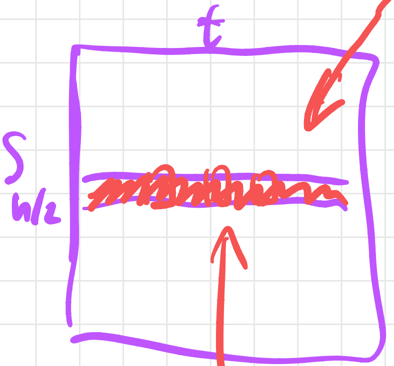
Алгоритм Хиршберга (1975)



$$lcs(s,t) = \max_j \left(lcs(s_{1..n/2}; t_{1..j}) + lcs(s_{n/2+1..n}; t_{j+1..m}) \right)$$

$j = \arg\max$, можно вычислить за $O(nm)$ времени и $O(n)$ памяти

$$lcs(s,t) = \max_j \left(lcs(s_{1..n/2}; t_{1..j}) + lcs(s_{n/2+1..n}; t_{j+1..m}) \right)$$



$lcs_{a,b} = lcs(s_{1..a}, t_{1..b})$

$lcs_{n/2;b} = lcs(s_{1..n/2}; t_{1..b})$

O(nm) времени и O(m) памяти

$$lcs(s_{n/2+1..n}; t_{j+1..m})$$
$$\|$$
$$lcs(s_{n..n/2+1}; t_{m..j+1})$$

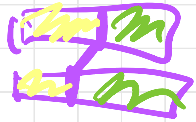
rev(s), rev(t)

O(nm) времени и O(m) памяти

$$lcs(s,t) = \max_j \Big(\overbrace{lcs(s_{1..n/2}; t_1..t_j)}^{a_j} + \underbrace{lcs(s_{n/2+1..n}; t_{j+1..m})}_{b_j} \Big)$$

j: O(m)

n, m $\quad O(nm)$



$O(\frac{n}{2} j)$ $\quad \frac{n}{2}, j$ $\qquad\qquad$ $\frac{n}{2}, m-j$ $\quad O(\frac{n}{2}(m-j))$

$\frac{n}{4}, j'$ $\qquad$ $\frac{n}{4}, j-j'$

$O(\frac{n}{2} m)$

log

$O(\frac{n}{4} m)$

$\Sigma: O(nm)$

Коди Хаффмана (1852)

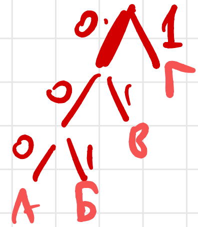
Кратність	Буква		
10	А	→ 00 (2)	000 (3)
10	Б	01 (2)	001 (3)
25	В	10 (2)	01 (2)
55	Г	11 (2)	1 (1)
100		200	165

АБАБ

↓

00 1|0 0|0 0

Б В . . .



Беспрефиксные коды

Постановка $a_1 \dots a_m$

$\Downarrow$

$C_1 \dots C_m$ — беспреф. коды

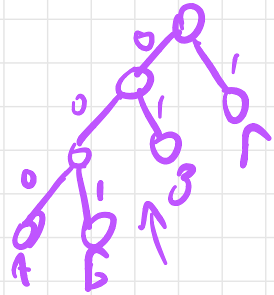
$$\sum a_i |C_i| \to \min$$

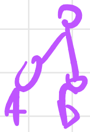
Редукция

Пусть x и y — символы с миним. частотой, тогда "склеим" в один символ

А Б В Г

10 10 25 55

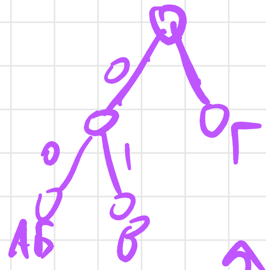




АБ В Г

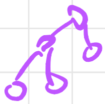
20 25 55

15



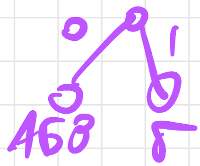
АБ

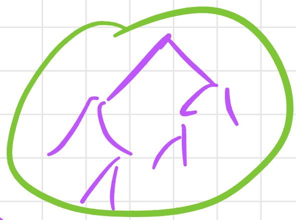
000 001



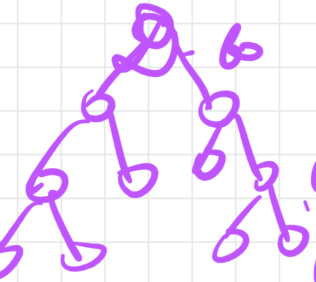
АБВ Г

45 55





Куча



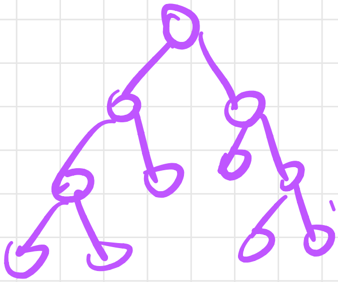
-во оптимальности кодов.

← построено "опт." алг.

$a_1 \; ... \; a_n$

$c_1 \; ... \; c_n$

$$\sum a_i |c_i| \to \min$$

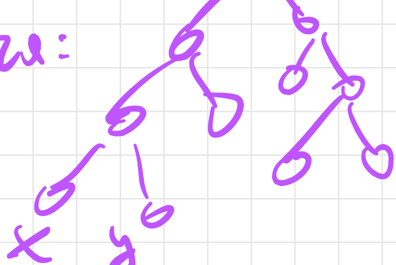


пусть ← построено "опт." алг.

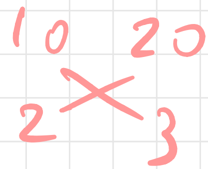
пусть
x и y – буквы
мин частоты
(по Хаффману)

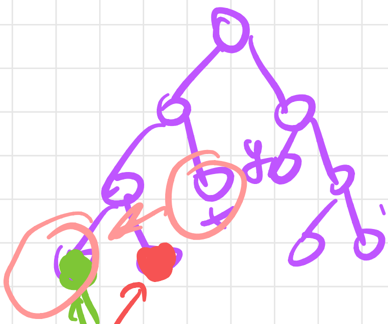
Тогда:

хотели:



Д-во:

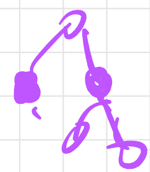




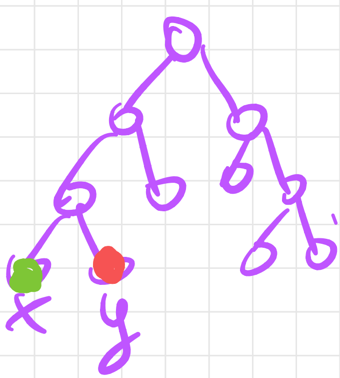
Пусть построено "опт. алг."

наиболее глубокий лист

брат/сестра лист такой же глубины



В опт. дереве заменю коды:



Пусть построено "опт. алг."

или экв исходному по стоимости или лучше.

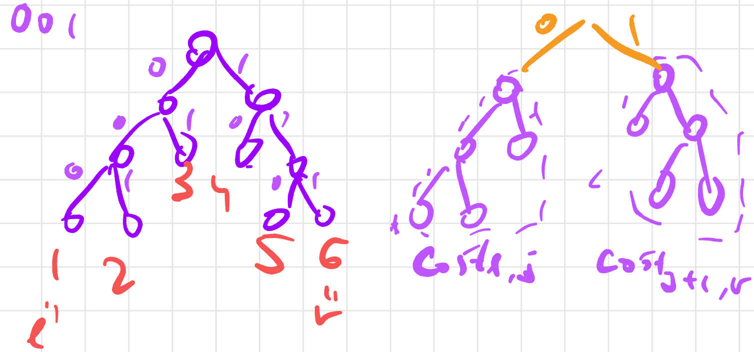
Упорядоченные беспрефиксные коды

$a_1 \ldots a_n$

$c_1 \ldots c_n$ — беспреф. коды

$$\sum a_i |c_i| \to \min$$

"new": $c_1 <_{lex} c_2 < \ldots < c_n$



$\left(\sum a_i |c_i|\right)$

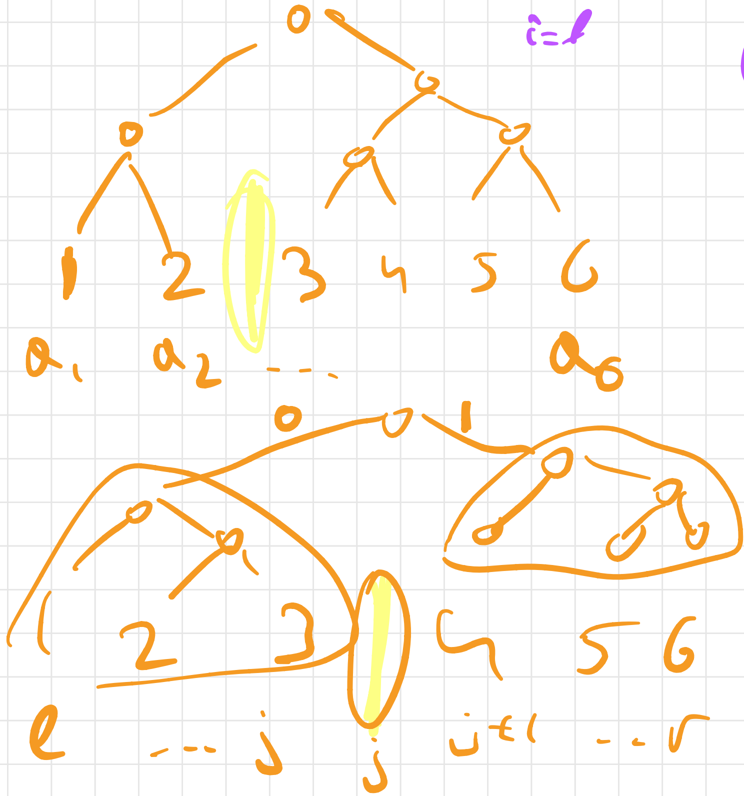
$cost_{l,r}$ = min стоимость

если только буквы в $l..r$

$$cost_{l,r} = \min_{j=l..r-1} \left(cost_{l,j} + cost_{j+1,r} \right.$$

$$+\sum_{i=l}^{r} a_i$$

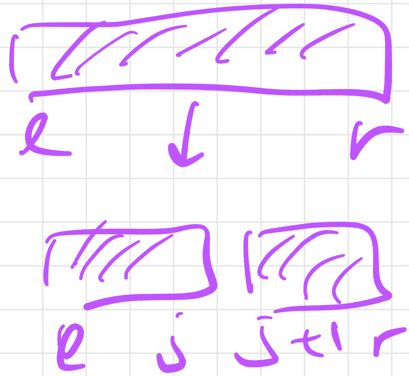
$O(n^3)$



C_l ... C_j C_{j+1} ... C_r

$\downarrow$

$0C_l$ ... $0C_j$ $1C_{j+1}$ ... $1C_r$



for len = 1..n

  for l = 0..n-1:

    r = l + len - 1

    $cost_{l,r}$ = вычисл по ф-ле выше

$O(n^3)$

Оптимизация Кнута:

$O(n^2)$

Динамика по подмножествам

$f[S]$ ← множество

S: $\underset{5\,4\,3\,2\,1\,0}{101001}_2$

$\{0, 3, 5\}$

битовые или

$a \mid b$ $a \& b$ $a \& \sim b$ $a \wedge b$

$a \cup b$ $a \cap b$ $a \setminus b$ $a \Delta b$

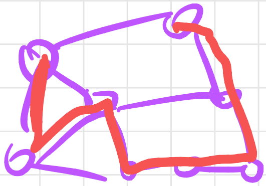
$(1 << x)$ $a \wedge (1 << x)$ $a \& \sim (1 << x)$

$\{x\}$ $a \Delta \{x\}$ $a \setminus \{x\}$

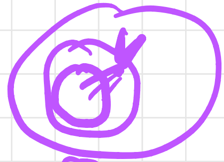
$a \mid (1 << x)$

$a \cup \{x\}$

Гамильтонов путь.



$n! \to 2^n \cdot n$



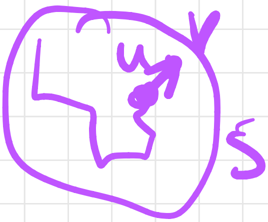
$f[S]$

$f[V(G)]$

$f[S][v] = 1/0$, правда ли что $\exists$ гамильтонов путь в $G[S]$ и заканчивающийся в v

$S \subseteq [n]$, $v \in S$

$$\underset{2^n}{f[S]}\underset{n}{[v]} = \underset{\substack{u \in S \\ u \neq v}}{\overset{(n)}{OR}} \left(f[S \setminus \{v\}][u] \text{ and } graph[u][v] \right)$$



$O(2^n \cdot n^2)$

$$O(2^n n)$$

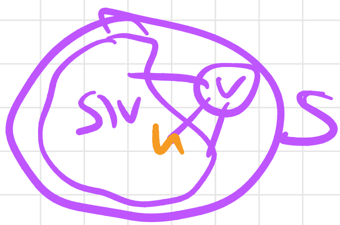
$f[S] \overset{def}{=} \{ v :\ \exists$ гам путь в $G[S]$ с концом в $v \}$

$S \subseteq V(G)$

$S = 0..2^n-1$, $n = |V(G)|$

$f[S] = \{ v :\ f[S \setminus \{v\}] \cap adj[v] \neq \emptyset \}$

множество соседей v



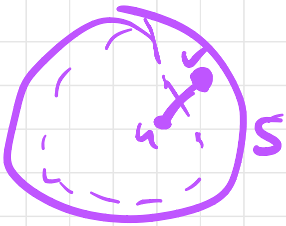

```
for S = 1...(1<<n)-1:
    if S состоит из 1-го бита
        f[S] = S
    else:
        for v = 0..n-1
```

if $(S \& (1 << v))$
AND $(f[S \wedge (1 << v)] \& adj[v])$:

$O(2^n n)$ времени
$O(2^n)$ памяти

$f[S] \mathrel{|}= (1 << v)$

$f[\text{все множества}] \neq \emptyset$.



S, v